Calcul des Indices des fonctions

par M. Augustin Cauchy membre de l'Académie des Sciences de Paris et de la Société Royale de Londres.

C'est dans le mémoire présenté à l'Académie de Turin le 27 novembre 1831 que j'ai fait connaître un nouveau calcul qui peut être fort utilement employé dans la résolution des équations de tous les degrés. Mais, dans le mémoire dont il s'agit, les principes de ce calcul, que je nomme le calcul des indices des fonctions, se trouvent déduits de la considération des intégrales définies. Je me propose ici de montrer comment on peut établir directement ces mêmes principes, sans recourir aux formules du calcul intégral.

Soit u une fonction réelle de la variable réelle x, et telle que si l'on fait croître cette variable par degrés insensibles entre deux limites données

$$x = x_0, \quad x = X,$$

u varie insensiblement et ne change jamais de signe sans passer par zéro ou par l'infini. Pour une valeur a de x comprise entre les limites $x = x_0$, $x = X$, et propre à vérifier l'équation

$$\frac{1}{u} = 0, \tag{1}$$

la fonction u passera, en devenant infinie, du négatif au positif, ou du positif au négatif, suivant qu'elle ne changera pas de signe. La quantité $+1$ sera la première, -1 sera la seconde, zéro sera la troisième valeur que je nomme l'indice de la fonction u pour la valeur donnée de la variable x; et l'indice intégral de u, pris entre les limites

$$x = x_0, \quad x = X > x_0,$$

ne sera autre chose que la somme des indices correspondant aux divers zéros de l'équation (1) renfermés entre les limites dont il s'agit. Je désignerai cet indice intégral par la notation

$$\int_{x_0}^{X} ((u)),$$

l'usage des doubles parenthèses étant ici le même que dans le calcul des résidus. Cela posé, on établira sans peine les propositions suivantes.

1er Théorème. Soient u une fonction réelle de x qui, entre les limites $x = x_0$, $x = X$, ne change jamais de signe, sans jamais devenir zéro ou infini, et u_0, U les deux valeurs de u correspondant aux valeurs réelles x_0, X de la variable x. La somme

$$\int_{x_0}^{X} ((u)) + \int_{x_0}^{X} ((\tfrac{1}{u})) \qquad (2)$$

sera équivalente à zéro, si les deux quantités u_0, U sont de même signe, à $+1$ si la première étant négative, la seconde est positive, à -1, si, la première étant positive, la seconde est négative.

Démonstration. Si l'on fait croître x par degrés insensibles depuis la limite x_0 jusqu'à la limite X, les seules valeurs de x auxquelles correspondront des valeurs de u ou de $\frac{1}{u}$ différentes de zéro seront celles pour lesquelles la fonction u deviendra infinie en changeant de signe, et à une semblable valeur de x correspondra toujours un indice de u ou de $\frac{1}{u}$ égal à $+1$, si u passe du négatif au positif, et un indice de u ou de $\frac{1}{u}$ égal à -1, si u passe du positif au négatif. Soient successivement

$$a, b, c, d, \ldots$$

les valeurs successives de x comprises entre les limites x_0, X et pour lesquelles la fonction u devient nulle ou infinie en changeant de signe, c'est-à-dire, en d'autres termes, les racines des

Les équations

(2) $u = 0, \quad \frac{1}{u} = 0$

renfermées entre les limites x_0, X, ces racines étant rangées par ordre de grandeur. Si u_0 est négatif, les indices de u ou de $\frac{1}{u}$ correspondant aux valeurs

$$a, b, c, d, \ldots$$

de la variable x seront respectivement

$$+1, -1, +1, -1, \ldots,$$

et par suite la somme de ces indices sera équivalente à zéro ou à $+1$, suivant que leur nombre sera pair ou impair, c'est à dire, en d'autres termes, suivant que V sera négatif ou positif. Au contraire, si u_0 est positif, les indices de u ou de $\frac{1}{u}$ correspondant aux valeurs

$$a, b, c, d, \ldots$$

de la variable x seront respectivement

$$-1, +1, -1, +1, \ldots,$$

et par suite la somme de ces indices sera équivalente à zéro ou à -1, suivant que leur nombre sera pair ou impair, c'est à dire, en d'autres termes, suivant que V sera positif ou négatif. Donc en définitive l'expression (2) ou la somme des indices de fonctions

$$u, \frac{1}{u}$$

correspondant aux valeurs

$$a, b, c, d, \ldots$$

de la variable x sera équivalente à $+1$, à -1, ou à zéro, suivant que la variable x, en partant graduellement de la valeur x_0 à la valeur X, fera passer la fonction u du négatif au positif ou du positif au négatif, ou enfin ne produira dans cette fonction un changement d'signe.

En supposant que la fonction réelle u de x ne change

jamais d'abîme, d'empêcher par zéro ou par l'infini, nous désigne-rons par la notation

$$\mathcal{I}(\!(u)\!)$$

la somme des résidus de u correspondant à toutes les racines de l'équation (1), entendue que l'on aura distinctement

$$\mathcal{I}(\!(u)\!) = \int_{-\infty}^{\infty} (\!(u)\!).$$

Si la fonction u se réduit à la forme $\frac{K}{x}$, K étant une quantité constante, on trouvera

$$\mathcal{I}\left(\!\left(\frac{K}{x}\right)\!\right) = \mathcal{I}\frac{K}{(\!(x)\!)} = 1,$$

ou

$$\mathcal{I}\left(\!\left(\frac{K}{x}\right)\!\right) = \mathcal{I}\frac{K}{(\!(x)\!)} = -1,$$

suivant que la quantité K sera positive ou négative. Cela posé, le théorème 1er sera évidemment compris dans la formule

$$\int_{x_0}^{X} (\!(u)\!) + \int_{x_0}^{X} (\!(\tfrac{1}{u})\!) = \tfrac{1}{2}\left\{ \mathcal{I}\frac{U}{(\!(x)\!)} - \mathcal{I}\frac{u_0}{(\!(x)\!)} \right\}. \tag{4}$$

Si à la fonction u on substitue le rapport entre deux fonctions entières u, v, tellement choisies que chacune d'elles ne change jamais de signe entre les limites $x = x_0$, $x = X$, dans l'hypothèse où x croît par zéro ou par l'infini, alors, en nommant u_0, v_0 et U, V les valeurs de ces deux fonctions pour $x = x_0$ et pour $x = X$, on aura, en vertu de la formule (4)

$$\int_{x_0}^{X} (\!\left(\tfrac{u}{v}\right)\!) + \int_{x_0}^{X} (\!\left(\tfrac{v}{u}\right)\!) = \tfrac{1}{2}\left\{ \mathcal{I}\frac{U}{V(\!(x)\!)} - \mathcal{I}\frac{u_0}{v_0(\!(x)\!)} \right\}, \tag{5}$$

ou, ce qui revient au même

$$\int_{x_0}^{X} (\!\left(\tfrac{u}{v}\right)\!) + \int_{x_0}^{X} (\!\left(\tfrac{v}{u}\right)\!) = \tfrac{1}{2}\left\{ \mathcal{I}\frac{V}{U(\!(x)\!)} - \mathcal{I}\frac{v_0}{u_0(\!(x)\!)} \right\}.$$

Lorsque u est algébriquement divisible par v, l'intégrale intégrale

$$\int_{x_0}^{X} (\!\left(\tfrac{u}{v}\right)\!)$$

et s'évanouissant seul, et la formule (5) donne

$$\int_{x_0}^{X} \langle\!\langle \frac{u}{v} \rangle\!\rangle = \frac{1}{2}\left\{ \int \frac{v}{V(x)} - \int \frac{u}{v_0(x)} \right\}. \qquad (6)$$

2e Théorème. Si, u, v étant deux fonctions entières de x, et le degré de la première égal ou supérieur au degré de la seconde, on nomme q le quotient et w le reste que fournit la division de u par v, on aura

$$\int_{x_0}^{X} \langle\!\langle \frac{u}{v} \rangle\!\rangle = \int_{x_0}^{X} \langle\!\langle \frac{w}{v} \rangle\!\rangle,$$

quelles que soient les valeurs particulières de x représentées par x_0 et X.

Démonstration. En effet, donc l'hypothèse admise, on aura, quelque soit x,

$$\frac{u}{v} = q + \frac{w}{v};$$

et par suite les rapports

$$\frac{u}{v}, \quad \frac{w}{v},$$

dont la différence q restera toujours finie en même temps que la variable x, deviendront simultanément infinis pour certaines valeurs réelles de x propres à vérifier l'équation

$$v = 0. \qquad (8)$$

Soit a l'une de ces valeurs. Quand x différera très peu de a, les deux rapports

$$\frac{u}{v}, \quad \frac{w}{v},$$

offriront des valeurs numériques très considérables, supérieures à celles de R, seront nécessairement des quantités de même signe. Donc, pour $x = a$, l'indice du rapport $\frac{u}{v}$ sera équivalent à l'indice du rapport $\frac{w}{v}$, et cette équivalence, subsistant pour toutes les racines de l'équation (8), entraînera la formule (7).

De la formule (7) jointe à la formule (5) on tire

(9) $$\int_{x_0}^{X} \left(\left(\frac{v}{u}\right)\right) = \frac{1}{2}\left\{ \int_{x_0}^{X} \frac{v}{V((x))} - \int_{x_0}^{X} \frac{u_0}{u_0((x))} \right\} - \int_{x_0}^{X} \left(\left(\frac{w}{v}\right)\right).$$

Suivant de cette dernière équation, la détermination de l'index intégral d'une fraction rationnelle $\frac{v}{u}$, entre des limites données, peut être réduite à la détermination de l'index intégral d'une autre fraction rationnelle $\frac{w}{v}$ dont le numérateur et le dénominateur soient des polynomes de degrés moindres. D'ailleurs une réduction semblable pourra s'appliquer non seulement à la nouvelle fraction $\frac{w}{v}$ mais encore à toutes les fractions que l'on en déduira successivement et que l'on formera en divisant l'un par l'autre deux restes consécutifs obtenus dans la recherche du plus grand commun diviseur des deux polynomes u et v. Or, comme l'avant dernier reste sera exactement divisible par le dernier, c'est à dire, par le plus grand commun diviseur, la formule (6) fera connaître l'index de la dernière fraction, duquel se déduiront immédiatement les index de toutes les autres. Ainsi l'aspect à l'aide des formules (6) et (9) détermine l'index de toute fraction rationnelle. Aspect accroît abrégé suivant le calcul à l'aide des considérations suivantes.

Si, u étant une fonction entière de la variable x, on désigne par ξ l'accroissement de u correspondant à l'accroissement α de la variable x, la somme $u+\xi$ pourra être représentée par un polynome ordonné suivant les puissances ascendantes de α ou de la forme

(10) $$u + \alpha u' + \frac{\alpha^2}{1.2} u'' + \frac{\alpha^3}{1.2.3} u''' + \text{etc.} \ldots,$$

et, dans ce polynome, les coefficients de

$$\alpha \quad \frac{\alpha^2}{1.2}, \quad \frac{\alpha^3}{1.2.3}, \quad \text{etc.} \ldots$$

savoir,

$$u, \quad u', \quad u'', \quad \text{etc.} \ldots$$

seront de nouvelles fonctions de x que l'on nomme dérivées

Delafonction u, la Dérivée du premier ordre u' n'étant autre chose que la limite vers laquelle converge le rapport

$$\frac{\Theta}{\alpha} = u' + \frac{\alpha}{1.2} u'' + \frac{\alpha^2}{1.2.3} u''' + \text{etc...} \quad .$$

tandis que α s'approche indéfiniment de zéro, et la Dérivée $u^{(n)}$ de l'ordre n étant le coefficient de $\frac{\alpha^n}{1.2.3...n}$ dans le polynome (10). Si l'on suppose, pour fixer les idées,

$$u = K_0 x^m + K_1 x^{m-1} + \dots + K_{m-2} x^2 + K_{m-1} x + K_m, \tag{12}$$

$K_0, K_1, \dots K_{m-2}, K_{m-1}, K_m$ étant des quantités constantes, on trouvera

$$u + \Theta = K_0 (x+\alpha)^m + K_1 (x+\alpha)^{m-1} + \dots + K_{m-2} (x+\alpha)^2 + K_{m-1} (x+\alpha) + K_m, \tag{13}$$

et par suite

$$\left\{ \begin{array}{l} u' = m K_0 x^{m-1} + (m-1) K_1 x^{m-2} + \dots + 2 K_{m-2} x + K_{m-1}, \\ u'' = (m-1) m K_0 x^{m-2} + (m-2)(m-1) K_1 x^{m-3} + \dots + 1.2\, K_{m-2}, \\ \text{etc....} \end{array} \right. \tag{14}$$

Or il résulte des formules (14) 1° que l'on obtiendra la Dérivée du premier ordre u' en multipliant chaque terme de la fonction u par l'exposant de x dans ce terme, et diminuant ce même exposant d'une unité, 2° que, pour obtenir les Dérivées de u des divers ordres, il suffit de former successivement diverses fonctions dont chacune soit la dérivée de la précédente, la première étant la dérivée de u.

Concevons maintenant que le degré de la fonction entière u, étant égal ou supérieur à m, u s'évanouisse pour une valeur donnée a de la variable x, et que $u^{(m)}$ soit alors le premier des termes de la suite

$$u, u', u'', \dots u^{(m)}, u^{(m+1)}, \text{etc....} \tag{15}$$

qui ne s'évanouisse pas à zéro. Si l'on nomme

$$A_m, A_{m+1}, A_{m+2}, \text{etc....}$$

les valeurs de fonctions

$$\frac{u_m}{1.2\dots m},\ \frac{u_{m+1}}{1.2\dots m(m+1)},\ \frac{u_{m+2}}{1.2\dots m(m+1)(m+2)},\ \text{etc...}$$

pour $x=a$ la valeur de v correspondante à

$$x = a+\alpha \tag{16}$$

sera

$$A_m \alpha^m + A_{m+1}\alpha^{m+1} + A_{m+2}\alpha^{m+2} + \text{etc...};$$

par conséquent l'équation (16) entraînera la suivante

$$u = A_m \alpha^m + A_{m+1}\alpha^{m+1} + A_{m+2}\alpha^{m+2} + \text{etc...}, \tag{17}$$

d'où il résulte que l'on aura développement

$$u = A_m (x-a)^m + A_{m+1}(x-a)^{m+1} + A_{m+2}(x-a)^{m+2} + \text{etc},$$

ou, ce qui revient au même,

$$u = (x-a)^m \left\{ A_m + A_{m+1}(x-a) + A_{m+2}(x-a)^2 + \dots \right\}. \tag{18}$$

Alors l'équation

$$u = 0, \tag{19}$$

pouvant être décomposée en deux autres, savoir

$$(x-a)^m = 0, \quad \text{et} \quad A_m + A_{m+1}(x-a) + A_{m+2}(x-a)^2 + \dots = 0,$$

devra être considérée comme admettant m racines égales dont a sera la valeur commune. Ajoutons que, pour des valeurs de x très rapprochées de a, le rapport

$$\frac{u}{(x-a)^m} \tag{20}$$

sera, en vertu de la formule (18), une quantité finie mais différente de zéro, affectée du même signe que A_m, par conséquent du même signe que $u^{(m)}$. Cela posé, on démontrera sans peine la proposition suivante.

De l'théorème. Soient u, v deux fonctions réelles et entières de x, et

Supposons que les deux équations

(19) $u=0$, (B) $v=0$,

offrent la première m racines, la seconde n racines égales et réelles dont a soit la valeur commune. L'indice de la fraction

(21) $\frac{v}{u}$

correspondant à $x=a$, sera zéro, si la différence $m-n$ est paire ou négative. Mais, si cette différence est impaire et positive, la même indice sera $+1$ ou -1, suivant que la valeur du rapport

(22) $\frac{v^{(n)}}{u^{(m)}}$

correspondante à $x=a$ sera positive ou négative.

Démonstration. Dans l'hypothèse admise, si l'on attribue à x une valeur très rapprochée de a, les deux fractions

(23) $\frac{u}{(x-a)^m}$, $\frac{v}{(x-a)^n}$

acquerront des valeurs finies, mais différentes de zéro, dont la première sera une quantité affectée du même signe que $u^{(m)}$, et la seconde une quantité affectée du même signe que $v^{(n)}$. Par suite le quotient qu'on obtient en divisant la seconde fraction par la première, savoir,

$$\frac{v}{u}(x-a)^{m-n}$$

sera, pour des valeurs de x infiniment rapprochées de a, une quantité finie, mais différente de zéro, et affectée du même signe que le rapport

$$\frac{v^{(n)}}{u^{(m)}}.$$

Donc alors la valeur de

$$\frac{v}{u}$$

sera infiniment petite finie, ou infiniment grande, en même

temps que le produit

$$\frac{v^{(n)}}{u^{(n)}} \frac{1}{(x-a)^{m-n}}. \tag{24}$$

Or, si la différence $x-a$ vient à changer de signe en passant par zéro, le produit (24) ne pourra changer de signe en passant par l'infini qu'autant que la différence $m-n$ sera impaire et positive, et dans ce cas le produit (24) passera du négatif au positif ou du positif au négatif, suivant que la valeur du rapport

$$\frac{v^{(n)}}{u^{(n)}}$$

correspondante à $x=a$ sera positive ou négative. Donc l'indice de la fraction (21) s'évanouira si la différence $m-n$ est paire ou négative, et cet indice deviendra $+1$ ou -1 lorsque la différence $m-n$ sera impaire et positive, suivant que le rapport $\frac{v^{(n)}}{u^{(n)}}$ deviendra positif ou négatif pour $x=a$.

Corollaire. Si a est une racine simple de l'équation (19) sans être racine de l'équation (18), l'indice de la fraction

$$\frac{v}{u}$$

correspondant à $x=a$ sera $+1$ ou -1, suivant que le rapport

$$\frac{v}{u'}$$

acquerra, pour $x=a$, une valeur positive ou négative.

Lorsque u, v désignent des fonctions réelles et entières de x, et forme de la fonction u est telle qu'on puisse facilement déterminer les racines de $u=0$ renfermées entre les limites x_0, X, le théorème 1 fournit le moyen de calculer immédiatement l'indice correspondant à chacune de ces racines et par suite l'indice intégral

$$\int_{x_0}^{X} (\!(\frac{v}{u})\!).$$

Dans le cas contraire, on peut successivement à la formule (g), remplacer la fraction $\frac{v}{u}$ par une fraction $\frac{w}{v}$ et continuer ainsi jusqu'à ce que l'on parvienne à une nouvelle fraction dont l'indice intégral entre les limites x_0, X puisse être facilement déterminé à l'aide du théorème k. On peut aussi poursuivre le calcul jusqu'à la fraction qui a pour numérateur le plus grand commun diviseur des deux polynomes u, v, fraction dont l'indice sera immédiatement déterminé par la formule (6), et alors on déduira sans peine de la formule (g) le théorème suivant

4e Théorème. Soient

$$u, v, \rho, \sigma, \ldots \psi, \omega \tag{25}$$

une suite de fonctions entières de x tellement choisie que de trois termes consécutifs de la suite (25) le troisième soit toujours égal au reste de la division du premier par le second, ce reste étant pris en signe contraire. $-\rho = w$ sera le reste de la division de u par v, $\pm\omega$ sera le plus grand commun diviseur algébrique des polynomes u, v; et pour déterminer l'indice de la fraction

$$\frac{v}{u}$$

entre les limites $x = x_0$, $x = X$, il suffira de comparer deux à deux sous le rapport des signes les termes qui se suivront immédiatement dans la suite (25), en supposant que l'on attribue à la variable x la valeur x_0, puis de compter les variations de signes et les permanences de signes que la suite 25) offrira dans chacune de ces deux hypothèses. Si l'on nomme μ le nombre des variations de signes qui se changeront en permanences, et ν le nombre des permanences qui se changeront en variations dans le passage de la première hypothèse à la seconde, l'indice de la fraction

$$\frac{v}{u},$$

pour entre les limites $x = x_0$, $x = X$ sera équivalent à la différence entre les deux nombres μ et ν, entendu qu'on aura

$$\int_{x_0}^{X} \left(\frac{v}{u} \right) = \mu - \nu. \tag{26}$$

Or à la fraction $\frac{v}{u}$ on substitue la suivante

$$\frac{u'}{u},$$

et, si l'on suppose toujours que, a étant racine de l'équation

$$u = 0,$$

$u^{(m)}$ soit le premier terme de la suite

$$u, u', u'', \dots u^{(m)}, u^{(m+1)}, \text{ etc.},$$

qui ne s'évanouisse pas avec $x - a$, les deux équations

$$u = 0, \tag{27}$$

$$u' = 0$$

admettront la première une racine, la seconde $m-1$ racines égales à a; et, comme la dérivée de l'ordre m de u sera en même temps la dérivée de l'ordre $m-1$ de u', on conclura du théorème 3 que l'index de $\frac{u'}{u}$ correspondant à la limite, pour chaque valeur réelle de x propre à vérifier l'équation $u = 0$. Par suite, si l'on nomme N' le nombre des racines réelles, mais distinctes de $u = 0$ renfermées entre les limites $x = x_0$, $x = X$, on aura

$$N' = \int_{x_0}^{X} \left(\frac{u'}{u} \right). \tag{28}$$

On trouvera ainsi le nombre total des racines réelles de l'équation $f(x) = 0$ en posant dans la formule (28) $x_0 = -\infty$, $X = \infty$, ou mieux simplement

$$x_0 = -R, \quad X = R,$$

R désignant un nombre supérieur aux modules de toutes les racines. On pourra donc, à l'aide de la formule (28), déterminer le nombre des racines réelles d'une équation ou plus généralement le nombre de

celles de ces racines qui se trouvent comprises entre ces limites remarq. Ajoutons que, si plusieurs racines sont renfermées entre les deux limites x_0, X, on pourra entre ces deux limites interposer une troisième valeur de x équivalente à leur moyenne arithmétique $\frac{x_0+X}{2}$, et déterminer le nombre des racines comprises 1° entre $x=x_0$ et $x=\frac{x_0+X}{2}$, 2° entre $x=\frac{x_0+X}{2}$ et $x=X$; par conséquent entre deux nouvelles limites dont la différence sera la moitié de la différence des deux premières. Or, en continuant de la sorte à resserrer les limites qui renferment les racines réelles, on finira par obtenir une suite de valeurs de x croissantes et tellement choisies que deux termes consécutifs ne comprennent jamais entre eux plus d'une valeur réelle de x propre à vérifier l'équation donnée.

Si l'on voulait obtenir le nombre des racines positives de l'équation (19), il suffirait de poser $x_0=0$ et $X=\infty$ ou $X=R$, dans la formule (24) qui serait ainsi réduite à

$$N = \int_0^{\infty} \left(\!\!\left(\frac{u'}{u} \right)\!\!\right), \qquad \text{ou} \qquad N = \int_0^{R} \left(\!\!\left(\frac{u'}{u} \right)\!\!\right). \tag{29 bis}$$

Si l'on nomme v_0, v_0' et V, V' les valeurs des deux fonctions u, u' pour $x=x_0$ et pour $x=X$, on tirera de la formule (28) jointe à la formule (9)

$$N = \frac{1}{2}\left\{ \int \frac{V}{V'((x))} - \int \frac{u_0}{u_0'((x))} \right\} - \int_{x_0}^{X} \left(\!\!\left(\frac{u}{u'} \right)\!\!\right) \tag{31}$$

Examinons ces particulier où l'on suppose $x_0=0$, $X=\infty$, le rapport

$$\frac{V}{V'}$$

acquiert une valeur infinie mais positive, et l'on a pour suite

$$\int \frac{V}{V'((x))} = 1.$$

Alors aussi, u_0, u_0' n'étant autre chose que les termes constant et le

coefficient de la première puissance de x dans la fonction u, l'indice

$$J \frac{u_0}{u'_0((x))}$$

sera équivalent à $+1$ ou à -1 suivant que les systèmes des deux derniers termes de u offrira une permanence ou une variation de signe. Enfin l'expression

$$-\int_{x_0}^{X} (\!(\frac{u}{u'})\!)$$

réduite à

$$-\int_{0}^{\infty} (\!(\frac{u}{u'})\!)$$

ne pourra surpasser le nombre des racines réelles de l'équation (27). Cela posé, on établira immédiatement de la formule (31) la proposition suivante.

1er Théorème. Le nombre des racines positives de l'équation $u=0$ ne pourra surpasser que d'une unité le nombre des racines positives de l'équation dérivée $u'=0$, et dans le cas seulement où le système des deux derniers termes de la fonction u offrira une variation de signe.

Corollaire. Exprimons d'une manière quelconque le nombre des racines de l'équation dérivée du premier ordre $u'=0$ ne peut surpasser que d'une unité le nombre des racines positives de l'équation dérivée du second ordre $u''=0$ et dans le cas seulement où le système des deux derniers termes de u', par conséquent le système des deux termes qui précèdent le dernier dans u offre une variation de signe. Donc le nombre des racines positives de $u=0$ surpasse d'une ou de deux unités au plus le nombre des racines positives de $u''=0$, et dans le cas seulement où le système des trois derniers termes de u offrira une ou deux variations de signe. En continuant ainsi, on finira par établir la règle des signes de Descartes comprise dans le théorème dont voici l'énoncé.

6e Théorème. Le nombre des racines positives d'une équation $u=0$,

Dans la suite, on désigne une fonction entière de x, ne pouvant s'annuler, le nombre des variations désigné qu'on obtient en comparant deux à deux les termes qui se succèdent immédiatement dans la fonction u. Le nombre des variations négatives ne peut surpasser le nombre des permanences de signes fourni par le même procédé.

Note. Après avoir établi comme on l'a expliqué à la fin de la première partie du 6e théorème, il suffira, pour démontrer la dernière partie de la première, de remplacer x par $-x$.

Observons encore que, si, dans la fraction $\frac{u}{u'}$, les coefficients des plus hautes puissances de la variable x se réduisent à zéro, il viendra, pour le calcul de l'économie, de remplacer x par $x+\varepsilon$, ε désignant un nombre infiniment petit. On s'aperçoit aisément de cette manière que, dans l'application du théorème de Descartes, on peut retenir encore comptés des termes qui disparaissent.

2°. Si, dans le théorème 3, on remplace la fraction $\frac{u}{u'}$ par sa valeur

$$\frac{u'x}{u},$$

et si l'on pose successivement $x_0 = -\infty$, $X = \infty$, on trouvera

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\left(\frac{u'x}{u} \right) \right) = N - M, \tag{31}$$

N désignant le nombre des racines réelles positives et M le nombre des racines réelles négatives; puis on tirera des formules (29) et (31)

$$N - M = -\int_{-\infty}^{\infty} \left(\left(\frac{u}{u'x} \right) \right). \tag{32}$$

La formule (32) s'accorde avec un théorème de Mr. Ingrel que j'ai démontré le premier, que, pour une équation de degré quelconque, on peut trouver des fonctions rationnelles des coefficients, dont les signes feront connaître le nombre des racines réelles positives et le nombre des racines réelles négatives.

Si l'on combine la formule (32) avec le théorème 2, on obtiendra cet

suivie mercredi 4 m à M. Charles d'Ovidio.

7e Théorème Soit

(99) $$u,\ u',\ \rho,\ \varsigma,\ \ldots\ldots\ \psi,\ \omega.$$

une suite de fonctions entières de x tellement choisies que de trois termes consécutifs de la suite (99) la troisième soit toujours égal, abstraction faite des signes, au reste de la division algébrique du premier par le second, mais affecté d'un signe contraire au signe de ce reste. $\pm\omega$ sera le plus grand commun diviseur algébrique de deux polynomes u, u'; et le nombre des permanences des signes qu'offriront les termes de la suite (99), pris consécutivement et comparés deux à deux, ne pourra que croître pour des valeurs croissantes de x. Or l'accroissement que recevra le nombre dont il s'agit dans le passage d'une limite donnée $x=x_0$ à une limite plus considérable $x=X$ sera précisément le nombre des racines distinctes de $u=0$ renfermées entre ces limites.

Cela. Cherchons à mettre successivement en évidence les restes des divisions successives opérées pour la recherche du plus grand commun diviseur entre u et u'. Ces restes pourront être supposés multipliés par des nombres entiers quelconques; ce qui permettra de faire disparaître les dénominateurs numériques dans les polynomes $\rho, \varsigma, \ldots \psi, \omega$, lorsque les coefficients des diverses puissances de x dans la fonction u seront des nombres entiers.

En s'appuyant sur les principes ci-dessus exposés, on pourrait encore étendre le calcul des indices à la détermination des racines imaginaires des équations, ainsi qu'à la résolution des équations simultanées, et démontrer en particulier la proposition suivante.

8e Théorème. Soient $f(x,y),\ F(x,y)$ deux fonctions de x, y, qui restent continues, entre les limites $x=x_0,\ x=X;\ y=y_0,\ y=Y$. Nommons $\varphi(x,y),\ \Phi(x,y)$ les dérivées de ces fonctions, relatives à x, et $\chi(x,y),\ X(x,y)$ leurs dérivées relatives à y. Enfin soit N le nombre des différents systèmes de valeurs de x, y, propres à vérifier les équations simultanées $f(x,y)=0,\ F(x,y)=0$, et comprises entre les limites données ci-dessus. On aura

$$N = \frac{1}{2}\left\{\int_{x_0}^{X} \frac{\Psi(x,Y)}{|\Psi(x,Y)|}dx - \int_{x_0}^{X} \frac{\Psi(x,y_0)}{|\Psi(x,y_0)|}dx + \int_{y_0}^{Y} \frac{\Psi(X,y)}{|\Psi(X,y)|}dy - \int_{y_0}^{Y} \frac{\Psi(x_0,y)}{|\Psi(x_0,y)|}dy\right\},$$

en supposant $\Psi(x,y) = \dfrac{\Phi(x,y)\chi(x,y) - \varphi(x,y)X(x,y)}{F(x,y)} f(x,y)$.

Turin ce 15 Juin 1833